Correction des exercices : Polynômes

1. Exercice 5 :

Enoncé :

Factoriser le polynôme suivant :

$$P(x) = x^4 + 13x^3 + 29x^2 + 13x - 30$$

Aide :

Regardez si les valeurs simples tel que -3,-2,-1, 1,2 et 3 ne serait pas solution évidente de P

Correction :

On remarque tous d'abord que :

$$P(1) = 1 + 13 + 29 - 13 - 30 = 0 \text{ et } P(-1) = 1 - 13 + 29 + 13 - 30$$

Donc -1 et 1 sont des racines de P

D'où

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x+1)(ax^2 + bx + c) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^4 + bx^3 + (a-c)x^2 - bx - c \end{aligned}$$

Par identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 13 \\ c = 30 \end{cases}$

Donc

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 13x + 30)$$

On calcule le discriminant du polynôme : $x^2 + 13x + 30$

$$\Delta = 169 - 4 * 30 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7$$

Les racines de ce polynôme sont donc :

$$x_1 = \frac{-13 - 7}{2} = -10 \text{ et } x_2 = \frac{-13 + 7}{2} = 3$$

Et donc

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x+3)(x+10)$$

2. Exercice 6 :

Enoncé :

Déterminer les paramètres A et B tel que $f(x) = x^4 + x^3 + Ax^2 + Bx + 2$ soit divisible par $x^2 + 2$ et écrire la factorisation.

Aide :

Utilisé la définition de la divisibilité d'un polynôme et le développement.

Correction :

Si f est divisible pas $x^2 + 2$ alors on peut écrire :

$$f(x) = (x^2 + 2)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2ax^2 + 2bx + 2c$$

Or

$$f(x) = x^4 + x^3 + Ax^2 + Bx + 2$$

D'où par identification:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \end{cases}$$

3. Exercice 7 :

Enoncé

Dériver, intégrer et donner les limites des polynômes suivants :

a) P(x) = $x^5 + 8x^3 + 19x^2 - 25x - 3$
b) Q(x)= $(x^2 + 5x - 3)^3$

Correction :

a) Limites : le degré du polynôme est impair, donc voir le cours pour les limites.

   La dérivée est p'(x)= $5x^4 + 24x^2 + 38x - 25$

   L'intégrale qui s'annule en 0 est p(x)= $\frac{1}{6}x^6 + 2x^4 + \frac{19}{3}x^3 - \frac{25}{2}x^2 - 3x$

b) Limites : Le degré du polynôme est pair (En effet, soit on le développe soit on remarque que le degré maximum est $x^{2*3} = x^6$) donc voir le cours pour les limites .
   La dérivée est r'(x) =$3(2x + 5)(x^2 + 5x - 3)^2$ (dérivée de u^n)

   Pour l'intégrale, on doit développer le polynôme puis l'intégrer.

   Cela donne r(x) = $\frac{x^7}{7} + \frac{5}{2}x^6 + \frac{66}{5}x^5 + \frac{35}{4}x^4 - 66x^3 + \frac{135}{2}x^2 - 27x$

4. Exercice 8 :

Les polynômes de Tchebychev sont des polynômes présents dans l'interpolation de Lagrange et servent à calculer cos (nx).

Partie A :

Les polynômes de Tchebychev s'écrivent : $T_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{n!}{2k!(n-2k)!} x^{n-2k} (x^2-1)^k$

Calculer les 4 premiers polynômes.

Partie B :

On pose $T_n(\cos(nx)) = Re(e^{inx})$

Retrouver la formule de la partie A (sauf que x= cos(x))

Indices : il faut utiliser la formule de Moivre. Utiliser les formules trigonométriques.

Réponse

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \Re((\cos n\alpha + i \sin n\alpha)) \\
&= \Re((\cos \alpha + i \sin \alpha)^n) \\
&= \Re((\cos \text{Arccos } x + i \sin \text{Arccos } x)^n) \\
&= \Re((x + i\sqrt{1-x^2})^n) \\
&= \Re(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} i^k (\sqrt{1-x^2})^k) \\
&= \sum_{k=0}^{E[n/2]} C_n^{2k} x^{n-2k} (i)^{2k} (1-x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{E[n/2]} C_n^{2k} x^{n-2k} (x^2-1)^k
\end{aligned}$$

Dans cette réponse, il faut remplacer x par cos (x) dans les 4 dernières lignes.